

Вопросы по предыдущей лекции:

1. Напишите правостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
2. Напишите левостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
3. Напишите центральное конечно-разностное соотношение для первой производной.
4. Напишите конечно-разностное соотношение для второй производной.
5. Какие из этих 4-х конечно-разностных соотношений имеют 1-й порядок точности, а какие 2-й?
6. Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной:

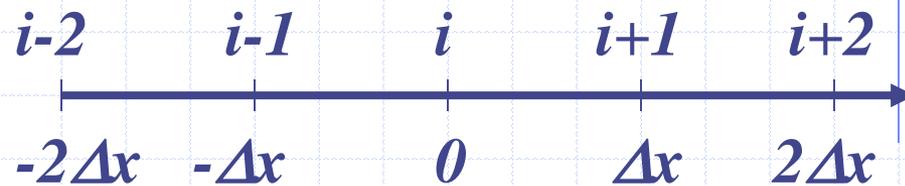
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j}$$

Методы представления ДУ в конечных разностях

Лекция 4

2. Метод полиномиальной аппроксимации

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$



$$\frac{df}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \left. \frac{df}{dx} \right|_i = b \quad (1)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2c + 6dx + \dots$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = 2c \quad (2)$$

$$f_{i-1} \approx a - b\Delta x + c\Delta x^2 - d\Delta x^3 \quad (3)$$

$$f_{i-1} + f_{i+1} \approx 2f + 2c\Delta x^2$$

$$f_i = a \quad (4)$$

$$f_{i+1} \approx a + b\Delta x + c\Delta x^2 + d\Delta x^3 \quad (5)$$

$$c \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2\Delta x^2}$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}$$

(5) - (3): $f_{i+1} - f_{i-1} \approx 2b\Delta x + 2d\Delta x^3$

$$f_{i+1} - f_{i-1} \approx 2b\Delta x \implies b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

(1)

(3): $f_{i-1} \approx a - b\Delta x$ $\implies f_{i-1} \approx f_i - b\Delta x$ $\implies \left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$

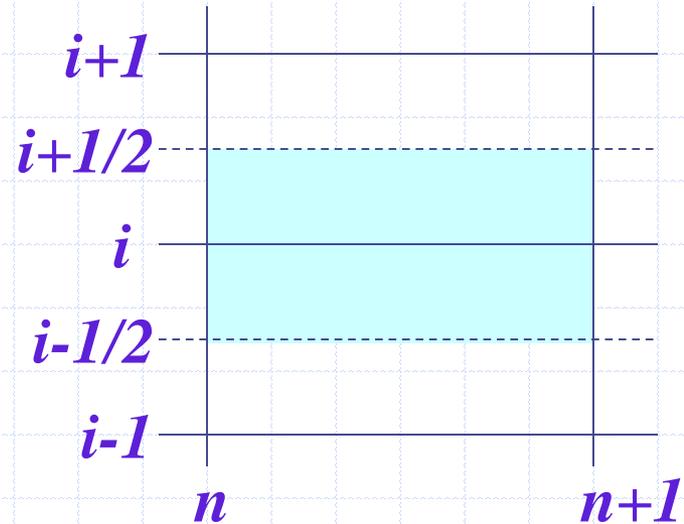
(4): $f_i \approx a$

(5): $f_{i+1} \approx a + b\Delta x$ $\implies f_{i+1} \approx f_i + b\Delta x$ $\implies \left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$

3. Метод интегрирования по контрольному объему

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_n^{n+1} \frac{\partial f}{\partial t} dt dx +$$



$$+ \int_n^{n+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} u \frac{\partial f}{\partial x} dx dt = \int_n^{n+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dt$$

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} (f^{n+1} - f^n) dx + u \int_n^{n+1} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) dt = a \int_n^{n+1} \left(\left. \frac{df}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{df}{dx} \right|_{i-1/2} \right) dt$$

Теорема «о среднем»:

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) dz \approx f(z^*) \Delta z \quad \Delta z = z_{k+1} - z_k \quad z^* \in [z_k, z_{k+1}]$$

z_k

$x^* = x_i, \quad t^* = t_n:$

$$f_{i+1/2} = (f_{i+1} + f_i)/2$$

$$f_{i-1/2} = (f_{i-1} + f_i)/2$$

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) \Delta x + u(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) \Delta t =$$

$$= a \left(\frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2}^n - \frac{df}{dx} \Big|_{i-1/2}^n \right) \Delta t$$

$$\frac{df}{dx} \Big|_{i-1/2}^n \approx \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$\int_i^{i+1} \frac{df}{dx} \Big|_n dx = f_{i+1}^n - f_i^n \approx \frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2}^n \Delta x$$

$$\frac{df}{dx} \Big|_{i+1/2}^n \approx \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}$$

**Точное
значение**

по т-ме о среднем

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) \Delta x + u \left(\frac{f_{i+1}^n + \cancel{f_i^n}}{2} - \frac{f_{i-1}^n + \cancel{f_i^n}}{2} \right) \Delta t =$$

$$= a \left(\frac{f_{i+1}^n - \cancel{f_i^n} - \cancel{f_i^n} - f_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \Delta t$$

$$\frac{(f_i^{n+1} - f_i^n) \Delta x}{\cancel{\Delta x} \Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2 \cancel{\Delta x} \Delta t} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x \cancel{\Delta x} \Delta t} \Delta t$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}$$

Домашнее задание:

4. Найдите точное и приближенные значения первой и второй производной в точке $x = 1$ следующей функции:

$$f(x) = \frac{a}{b} e^{-\frac{x}{b}} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = \frac{a}{b} e^{-\frac{x}{b}} \Big|_{x=1} = 2e^{-\frac{1}{10}} = ?$$

$$a = 20, \quad b = 10, \quad \Delta x = 0,2$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=1} = ?$$

Приближенные значения первой производной найдите по трем формулам (левосторонняя, правосторонняя и центральная аппроксимации).

Подсказка:

$$f_i = f(x_i) = f(1); \quad f_{i+1} = f(x_i + \Delta x) = f(1 + 0,2) = f(1,2)$$

$$f_{i-1} = f(x_i - \Delta x) = f(1 - 0,2) = f(0,8)$$